山西能源学院教案

授课班级__能动 1701-1704__　授课时间_____　　计_2_学时

课题（章节及内容）	3.3 典型一维非稳态导热的分析解
教学目的和要求	理解三类边界条件下：无限大平板、无限长圆柱、球的分析解； 了解非稳态导热正规状况阶段分析解的简化； 了解诺谟图的意义。
重　点 难　点	三类边界条件下无限大平板的分析解。
教学进程（含课堂教学内容、教学方法、辅助手段等）	教学内容：三种几何形状物体的温度场分析解，非稳态导热正规状况阶段分析解的简化；非稳态导热正规状况阶段的工程计算方法。 教学方法：讲授与练习、启发讨论、诱导式、归纳总结法。
作业布置	
主　要 参考资料	《传热学》第四版，杨世铭，陶文铨， 高等教育出版社，2006 年 8 月
课后自我总结分析	

山西能源学院教案

3-3 典型一维非稳态导热的分析解

本节介绍第三类边界条件下：无限大平板、无限长圆柱、球的分析解及应用。如何理解无限大物体，如：当一块平板的长度、宽度 >> 厚度时，平板的长度和宽度的边缘向四周的散热对平板内的温度分布影响很少，以至于可以把平板内各点的温度看作仅是厚度的函数时，该平板就是一块“无限大”平板。若平板的长度、宽度、厚度相差较小，但平板四周绝热良好，则热量交换仅发生在平板两侧面，从传热的角度分析，可简化成一维导热问题。

一、 无限大平板的分析解

已知：厚度 2δ 的无限大平板，初温 t_0，初始瞬间将其放于温度为 t_∞ 的流体中，而且 $t_\infty > t_0$，流体与板面间的表面传热系数为一常数。

试确定在非稳态过程中板内的温度分布。

解：如图 3-5 所示，平板两面对称受热，所以其内温度分布以其中心截面为对称面。

对于 $x \geq 0$ 的半块平板，其导热微分方程：$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ $(0<x<\delta,\ \tau>0)$

（ 3-8 ）

定解条件：$t(x,0)=t_0(0\leq x\leq\delta)$

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$$ （边界条件）

$$h\left[t(\delta,\tau)-t_\infty\right]=-\lambda\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=\delta}$$ （边界条件）

引入过余温度：$\theta = t(x,t)-t_\infty$

则 $$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\quad (0<x<\delta,\ \tau>0)$$ (3-9)

$\theta(x,0)=\theta_0(0\leq x\leq\delta)$ （初始条件）

$$\frac{\partial \theta(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$$ （边界条件）

$$h\theta(\delta,\tau) = -\lambda \frac{\partial \theta(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=\delta}$$

（边界条件）

对偏微分方程 $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ 分离变量求解得：

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0} = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n\delta)^2 \frac{a\tau}{\delta^2}} \frac{\sin(\beta_n\delta)\cos[(\beta_n\delta)\frac{x}{\delta}]}{\beta_n\delta + \sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n\delta)}$$

（ 3-10 ）

其中离散值 β_n是下列超越方程的根，称为特征值。

$$\tan(\beta_n\delta) = \frac{Bi}{\beta_n\delta},\ n = 1,2,\ldots\ldots$$

（ 3-11 ）

其中 Bi 是以特征长度为 δ 的毕渥数。

由此可见：平板中的无量纲过余温度 θ/θ_0 与三个无量纲数有关：以平板厚度一半 δ 为特征长度的傅立叶数、毕渥数及 x/δ 即：

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0} = \frac{t(x,\ \tau) - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = f(Fo,\ Bi,\frac{x}{\delta})$$

（ 3-12 ）

二、非稳态导热的正规状况阶段

1 、平板中任一点的过余温度与平板中心的过余温度的关系

前述得到的分析解是一个无穷级数，计算工作量大，但对比计算表明，当 Fo>0.2 时，采用该级数的第一项与采用完整的级数计算平板中心温度的误差小于 1% ，因此，当 Fo>0.2 时，采用以下简化结果：

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0} = \frac{2\sin(\beta_1\delta)}{\beta_1\delta + \sin(\beta_1\delta)\cos(\beta_1\delta)} e^{(\beta_1\delta)^2 Fo} \cos\left[(\beta_1\delta)\frac{x}{\delta}\right]$$

（ 3-13 ）

其中特征值 $\beta_n (n = 1,2\cdots)$ 之值与 Bi 有关。

由上式（ 3-13 ）可知： Fo>0.2 以后平板中任一点的过余温度 θ(x ， τ) 与平板中心的过余温度 θ(0 ， τ)= θ_m （ τ ）之比为：$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos(\mu_1\frac{x}{\delta})$

（ 3-14 ）

此式反映了非稳态导热过程中一种很重要的物理现象：即当 Fo>0.2 以后，虽然 $\theta(x, \tau)$ 与 $\theta_m(\tau)$ 各自均与τ有关，但其比值则与τ无关，而仅取决于几何位置（x/δ）及边界条件（ Bi ）。也就是说，初始条件的影响已经消失，无论初始条件分布如何，只要 Fo>0.2 ，$\theta(x,\tau)/\theta_m(\tau)$ 之值是一个常数，也就是无量纲的温度分布是一样的。

由此可见，当 Fo>0.2 时，非稳态导热过程进入正规状况阶段。

2 、在一个时间间隔内非稳态导热过程中传递的热量

1 ） 从物体初始时刻平板与周围介质处于热平衡，这一过程中传递的热量：

$$Q_0 = \rho c V(t_0 - t_\infty) \tag{3-15}$$

此值为非稳态导热过程中传递的最大热量。

2 ） 从初始时刻到某一时间 τ ，这段时间内所传递的热量 $Q_{0\to\tau}$：

$$Q_{0\to\tau} = \rho c \int_V [t_0 - t(x,\tau)] dV \tag{3-16}$$

3 ） $\dfrac{Q_{0\to\tau}}{Q_0}$ 之比：

$$\frac{Q_{0\to\tau}}{Q_0} = \frac{\rho c \int_V [t_0 - t(x,\tau)] dV}{\rho c V(t_0 - t_\infty)} = \frac{1}{V}\int_V \frac{(t_0 - t_\infty) - (t - t_\infty)}{t_0 - t_\infty} dV$$

$$= 1 - \frac{1}{V}\int_V \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} dV = 1 - \frac{\bar\theta}{\theta_0} \tag{3-17}$$

其中：$\bar\theta = \bar\theta(\tau)$ 是时刻 τ 物体的平均过余温度，$\bar\theta = \dfrac{1}{V}\int_V (t - t_\infty) dV$ 。

对于无限大平板，当 Fo>0.2 ，将式（ 3-13 ）代入 $\bar\theta$ 的定义式，可得：

$$\bar\theta(\tau)/\theta_0 = \frac{1}{V}\int_V \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} dV = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1} e^{-(\mu_1^2 Fo)} \frac{\sin\mu_1}{\mu_1} \tag{3-18}$$

对圆柱体、球体 $Fo = \dfrac{a\tau}{R^2}$ >0.2 时，无穷级数的解也可用第一项近似代替，

并且 $\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}$ 及 $\bar{\theta}(\tau)$ 可表示为：

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=A\exp(-\mu_1^2 Fo)f(\mu_1\eta)$$

（ 3-19 ）

$$\bar{\theta}(\tau)/\theta_0=A\exp(-\mu_1^2 Fo)B$$

（ 3-30 ）

其中： η 为无量纲几何位置，对平板 $\eta=x/\delta$，对柱体及球体 $\eta=r/R$， R 为外表面半径，系数 A 、 B 及函数 $f(\mu_1\eta)$ 的表达式取决于几何形状，见教材表 3-2 所示。

三、正规阶段状况的实用计算方法

当 Fo>0.2 时，可采用上述计算公式求得非稳态导热物体的温度场及交换的热量，也可采用简化的拟合公式和诺谟图求得。

1 、诺模图：工程技术中，为便于计算，采用按分析解的级数第一项绘制的一些图线，叫诺谟图。

2 、海斯勒图：诺谟图中用以确定温度分布的图线，称海斯勒图。

首先根据（ 3—13 ）式给出 θ_m/θ_0 随 Fo 及 Bi 变化的曲线（此时 x/δ =0 ），然后根据（ 3 — 14 ）式确定 θ/θ_m 的值，于是平板中任意一点的 θ/θ_0 值便为：$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{\theta_m}{\theta_0}\frac{\theta}{\theta_m}$ （ 3-21 ）

同样，从初始时刻到时刻 τ 物体与环境间所交换的热量，可采用（ 3 — 15 ）、（ 3 — 17 ）作出 $\frac{Q}{Q_0}=f(Fo,Bi)$ 曲线。

3 、诺谟图法评述

优点：简洁方便。

缺点：准确度有限，误差较大。

目前，随着计算技术的发展，直接应用分析解及简化拟合公式计算的方法受到重视。

四、分析解应用范围的推广及讨论

1 、推广范围

1 ）对物体被冷却的情况也适用；

2 ）也适于一侧绝热，另一侧为第三类边界条件的厚为 δ 的平板；

3 ）当固体表面与流体间的表面传热系数 h $\to\infty$时，即表面换热热阻 $\to 0$ 时，所以 $Bi\to\infty$时分析解就是固体表面温度发生一突然变化然后保持不变时的解，即第一类边界条件的解。

2 、讨论 Bi 与 Fo 对温度场的影响：

1 ）傅立叶数 Fo ：

由 (3-10) 、 (3-13) 式及诺模图可知：物体中各点的过余温度随时间 τ 的增加而减小；而 Fo 与 成正比，所以物体中各点过余温度亦随 Fo 的增大而减小。

2 ）毕渥数 Bi

Bi 对温度的影响从以下两方面分析：

一方面，从教材图 3 — 6 可知， Fo 相同时， Bi 越大， θ_m/θ_0 越小。因为， Bi 越大，意味着固体表面的换热条件越强，导致物体的中心温度越迅速地接近周围介质的温度；当 Bi $\to\infty$时，意味着在过程开始瞬间物体表面温度就达到介质温度，物体中心温度变化最快，所以在诺模图中 1/Bi=0 时的线就是壁面温度保持恒定的第一类边界条件的解。

另一方面 Bi 的大小决定于物体内部温度的扯平程度。如：对于平板，从诺模图 3 — 7 中可知：

当 $\frac{1}{Bi}>10$ （即 Bi<0.1 ）时，截面上的过余温度差小于 5 %

当 Bi 下限一直推到 0.01 时，其分析解与集总参数法的解相差极微。

综上可得如下结论：介质温度恒定的第三类边界条件下的分析解；当 Bi $\to\infty$时，转化为第一类边界条件下的解， Bi $\to 0$ 时，则与集总参数法的解相同。