山西能源学院教案

授课班级__能动 1701-1704__　　授课时间_____　　　计_2_学时

课题（章节及内容）	4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解
教学目的和要求	掌握导热问题数值解法的求解思路； 利用热平衡法建立边界节点的离散方程； 了解高斯-赛德尔迭代法的求解离散方程的步骤和特点。
重　点 难　点	边界节点离散方程的建立方法； 高斯-赛德尔迭代法的求解离散方程的步骤。
教学进程（含课堂教学内容、教学方法、辅助手段等）	教学内容：热平衡法建立边界节点离散方程；求解代数方程的迭代法。 教学方法：讲授与练习、启发讨论、诱导式、归纳总结法。
作业布置	4-9 4-10
主　要 参考资料	《传热学》第四版，杨世铭，陶文铨， 高等教育出版社，2006 年 8 月
课后自我总结分析	本章内容以分析推导为主，要求学生具有扎实的数学功底，课堂上部分学生因高数基础不好而无法理解推导过程（如泰勒展开），老师应尽可能对相关数学知识做复习补充。

山西能源学院教案

4.3 边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

一、用热平衡法导出典型边界点上的离散方程

假设物体具有内热源$\dot{\Phi}$（不必均匀分布），而且边界上有向该元体传递的热流密度 q_w：

1 、位于平直边界上的节点

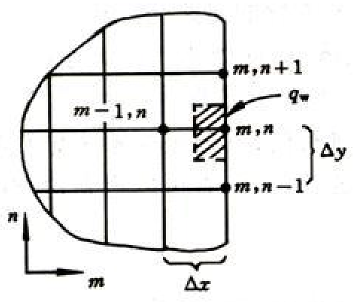

图 4-4 平直边界上的节点

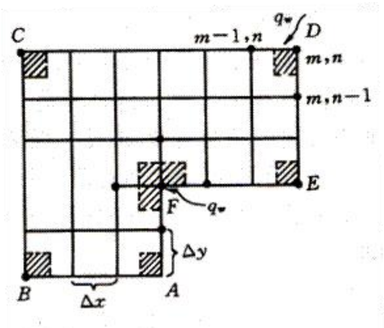

图 4-5 外部角点与内部角点

如图所示 4-4 边界节点 (m,n) 只能代表半个元体，若边界上有向该元体传递的热流密度为 q_w，据能量守恒定律对该元体有：

$$\lambda\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}\Delta y+\lambda\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\lambda\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x\Delta y}{2}\dot{\Phi}_{m,n}+\Delta y q_w=0 \quad (4\text{-}9)$$

若 △x=△y，则：$$t_{m,n}=\frac{1}{4}\left(2t_{m-1,n}+t_{m+1,n}+t_{m-1,n}+\frac{\Delta x^2\dot{\phi}_{m,n}}{\lambda}+\frac{2\Delta x q_w}{\lambda}\right)$$

（4-10 ）

2 、外部角点

如图 4-5 所示，二维墙角计算区域中，该节点外角点仅代表 1/4 个以 △x，△y 为边长的元体。假设边界上有向该元体传递的热流密度为 q_w，则据能量守恒定律得其热平衡式为：

$$\lambda\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta y}{2}+\lambda\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x\Delta y}{4}\dot{\Phi}_{m,n}+\frac{\Delta x+\Delta y}{2}q_w=0$$

（ 4 -11 ）

若 △x=△y 时，则： $t_{m,n}=\frac{1}{2}(t_{m-1,n}+t_{m,n-1}+\frac{\Delta x^2\dot{\phi}_{m,n}}{2\lambda}+\frac{2\Delta x q_w}{\lambda})$

（ 4-12 ）

3 、内部角点：

如图 4-5 所示内部角点代表了 3/4 个以 △x，△y 为边界长的元体。

同理得：

$$\lambda\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}\Delta y+\lambda\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}\cdot\Delta x+\lambda\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\lambda\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta y}{2}$$
$$+\frac{3\Delta x\Delta y}{4}\dot{\Phi}_{m,n}+\frac{\Delta x+\Delta y}{2}q_w=0$$

(4 -13)

△x=△y 时，则：

$$t_{m,n}=\frac{1}{6}(2t_{m-1,n}+2t_{m,n+1}+t_{m,n-1}+t_{m+1,n}+\frac{3\Delta x^2\dot{\Phi}_{m,n}}{2\lambda}+\frac{2\Delta x q_w}{\lambda})$$

（ 4-14 ）

4、讨论有关 q_w 的三种情况：

1 ）若是绝热边界

则 $q_w=0$，即令上式 $q_w=0$ 即可。

2 ）若 $q_w\neq0$ 时

流入元体，q_w 取正，流出元体，q_w 取负使用上述公式。

3 ）若属对流边界

则：$q_w=h(t_f-t_{m,n})$ ，将 q_w 代入上式即可。

△x=△y 时，则：

对于平直边界：

$$2(\frac{h\Delta x}{\lambda}+2)t_{m,n}=2t_{m-1,n}+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}+\frac{\Delta x^2}{\lambda}\dot{\Phi}_{m,n}+\frac{2h\Delta x}{\lambda}t_f$$

（ 4-15 ）

对外角点：

$$2(\frac{h\Delta x}{\lambda}+1)t_{m,n}=t_{m-1,n}+t_{m,n-1}+\frac{\Delta x^2}{2\lambda}\dot{\Phi}_{m,n}+\frac{2h\Delta x}{\lambda}t_f$$

（ 4-16 ）

对内角点：

$$2(\frac{h\Delta x}{\lambda}+3)t_{m,n}=2t_{m-1,n}+2t_{m,n+1}+t_{m+1,n}+t_{m,n-1}+\frac{3\Delta x^2}{2\lambda}\dot{\phi}_{m,n}+\frac{2h\Delta x}{\lambda}t_f$$

（ 4-17 ）

其中，$\frac{h\Delta x}{\lambda}$ 无量纲数是以网格步长 △x 为特征长度的毕渥数，即为 $Bi_{\triangle}$。

二、代数方程的求解方法

1 、直接解法：通过有限次运算获得精确解的方法，如：矩阵求解，高斯消元法。

2 、迭代法：先对要计算的场作出假设（设定初场），在迭代计算中不断予以改进，直到计算前的假定值与计算结果相差小于允许值为止的方法，称迭代计算收敛。目前应用较多的是：

1 ）高斯——赛德尔迭代法：每次迭代计算，均是使用节点温度的最新值。

2 ）用雅可比迭代法：每次迭代计算，均用上一次迭代计算出的值。

设有一三元方程组：

$$a_{11}t_1+a_{12}t_2+a_{13}t_3=b_1$$
$$a_{21}t_1+a_{22}t_2+a_{23}t_3=b_2$$
$$a_{31}t_1+a_{32}t_2+a_{33}t_3=b_3$$

（ 4-18 ）

其中 $a_{i,j}$（ i=1,2,3 ； j=1,2,3 ）及 $b_i\,(i=1,2,3)$ 均不为零。

采用高斯——赛德尔迭代法的步骤：

（ 1 ）将三元方程变形为迭式方程：

$$t_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}t_2-a_{13}t_3)$$
$$t_2=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}t_1-a_{23}t_3)$$
$$t_3=\frac{1}{a_{33}}(b_3-a_{31}t_1-a_{32}t_2)$$

（ 4-19 ）

（ 2 ）假设一组解（迭代初场），记为：$t_1^{(0)}$、$t_2^{(0)}$、$t_3^{(0)}$，并代入迭代方程求得第一次解 $t_1^{(1)}$、$t_2^{(1)}$、$t_3^{(1)}$，同理求得改进值 $t_1^{(k)}$、$t_2^{(k)}$、$t_3^{(k)}$，（注：再次计算应该用新值）如：

$$t_1{}^{(1)}=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}t_2{}^{(0)}-a_{13}t_3{}^{(0)})$$

$$t_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}t_1^{(1)} - a_{23}t_3^{(0)}) \quad (4\text{-}20)$$

$$t_3^{(0)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}t_1^{(1)} - a_{32}t_2^{(1)})$$

（ 3 ）以新的初场 $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, t_3^{(1)}$ 重复计算，直到相邻两次迭代值之差小于允许值，则称迭代收敛，计算终止。

三、判断迭代收敛的准则

1 、 $\max\left|t_i^{(k)} - t_i^{(k+1)}\right| \le \varepsilon$

2 、 $\max\left|\frac{t_i^{(k)} - t_i^{(k+1)}}{t_i^{(k)}}\right| \le \varepsilon$ （ 4-21 ）

3 、 $\max\left|\frac{t_i^{(k)} - t_i^{(k+1)}}{t_{\max}^{(k)}}\right| \le \varepsilon$

其中上角标 k,k+1 表示迭代次数， $t_{\max}{}^{(k)}$ 为第 k 次迭代计算所的计算区域中的最大值。若计算区域中有 t→0 时，应采用 3 判断之。