山西能源学院教案

授课班级 能动 1701-1704 授课时间_____ 计 2 学时

课题（章节及内容）	2.2 导热问题的数学描写 2.3 典型一维导热问题的分析解-通过平壁的导热
教学目的和要求	重点掌握直角坐标下导热微分方程； 掌握导热系数的物理意义； 掌握微分方程的定解条件。 了解各种物质中导热系数的特点及影响因素； 理解导热微分方程意义； 了解导热微分方程的适用范围； 掌握通过单层平壁温度分布和热流量的推导； 理解多层平壁的导热的计算方法。 掌握微分方程的定解条件。
重 点 难 点	直角坐标下导热微分方程的推导； 微分方程的定解条件； 通过单层平壁温度分布和热流量的推导。
教学进程（含课堂教学内容、教学方法、辅助手段等）	教学内容：直角坐标下导热微分方程；导热微分方程意义；导热微分方程的适用范围；导热系数的物理意义；微分方程的定解条件；各种物质中导热系数的特点及影响因素；通过单层平壁和多层平壁的导热。 教学方法：讲授与练习、启发讨论、诱导式、归纳总结法。
作业布置	2-2 2-3
主 要 参考资料	《传热学》第四版，杨世铭，陶文铨， 高等教育出版社，2006 年 8 月
课后自我总结分析	

山西能源学院教案

2 -2 导热问题的数学描写

由前可知：

（ 1 ）对于一维导热问题，根据傅立叶定律积分，可获得用两侧温差表示的导热量。

（ 2 ）对于多维导热问题，首先获得温度场的分布函数 $t = f(x, y, z,)$ ，然后根据傅立叶定律求得空间各点的热流密度矢量。

一 、导热微分方程

1 、定义：根据能量守恒定律与傅立叶定律，建立导热物体中的温度场应满足的数学表达式，称为导热微分方程。

2 、导热微分方程的数学表达式（导热微分方程的推导方法，假定导热物体是各向同性的。）

1 ）笛卡儿坐标系中的导热微分方程

针对笛卡儿坐标系中微元平行六面体，由前可知，空间任一点的热流密度矢量可以分解为三个坐标方向的矢量。

同理，通过空间任一点任一方向的热流量也可分解 x 、y 、z 坐标方向的分热流量，如图 2-4 所示。

① 通过 x=x、y=y、z=z 三个微元表面而导入微元体的热流量：ϕ_x 、ϕ_y 、ϕ_z 的计算。

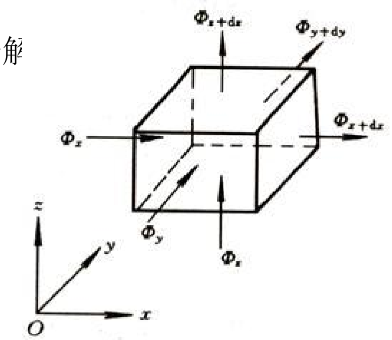

图 2-4 微元平行六面体的导热分析

根据傅立叶定律得

$$\Phi_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dydz$$

$$\Phi_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} dxdz$$

$$\Phi_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} dxdy$$

② 通过 x=x+dx 、 y=y+dy 、 z=z+dz 三个微元表面而导出微元体的热流量ϕx+dx、ϕy+dy、ϕz+dz 的计算。

根据傅立叶定律得：

$$\Phi_{x+dx} = \Phi_x + \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = \Phi_x + \frac{\partial}{\partial x}(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dydz)dx$$

$$\Phi_{y+dy}=\Phi_y+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy=\Phi_y+\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda\frac{\partial t}{\partial y}dxdz)dy$$

$$\Phi_{z+dz}=\Phi_z+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz=\Phi_z+\frac{\partial}{\partial z}(-\lambda\frac{\partial t}{\partial z}dxdy)dz$$

③ 对于任一微元体根据能量守恒定律，在任一时间间隔内有以下热平衡关系：导入微元体的总热流量+微元体内热源的生成热=导出微元体的总热流量+微元体热力学能（内能）的增量

其中 微元体内能的增量 $=\rho c\frac{\partial t}{\partial\tau}dxdydz$

微元体内热源生成热 $=\dot{\Phi}dxdydz$

其中 ρ、c 、$\dot{\Phi}$、τ — 微元体的密度、比热容、单位时间内单位体积内热源的生成热及时间。

导入微元体的总热流量 $\phi_\lambda=\phi_x+\phi_y+\phi_z$

导出微元体的总热流量 $\phi_w=\phi_{x+dx}+\phi_{y+dy}+\phi_{z+dz}$

将以上各式代入热平衡关系式，并整理得：

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial y}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial z}{\partial z})+\dot{\Phi}$$

这是笛卡尔坐标系中三维非稳态导热微分方程的一般表达式。

其物理意义：反映了物体的温度随时间和空间的变化关系。

讨论：

① $\lambda=const$ 时

$$\frac{\partial t}{\partial\tau}=\frac{\lambda}{\rho c}(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2})+\dot{\Phi}/\rho c$$

其中 a = $\lambda/\rho c$ ——称扩散系数（热扩散率）

② 物体内无内热源，即 Φ=0 ，且 $\lambda=const$ 时

$$\frac{\partial t}{\partial\tau}=\frac{\lambda}{\rho c}+(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2})$$

③ 若 $\lambda=const$ 时，且属稳态，即：$\frac{\partial t}{\partial\tau}=0$

$$(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2})+\dot{\Phi}/\lambda=0$$

即数学上的泊桑方程。该微分方程属常物性、稳态、三维、有内热源问题的温度

场控制方程式。

④ 常物性、稳态、无内热源

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0$$

即数学上的拉普拉斯方程。

⑤ 一维，常物性，稳态，无内热源 $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=0$ 即： $\frac{d^2 t}{dx^2}=0$

2 ）圆柱坐标系中的导热微分方程

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r\frac{\partial t}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\lambda\frac{\partial t}{\partial \varphi})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})+\dot{\Phi}$$

3 ）球坐标系中的导热微分方程

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r^2\frac{\partial t}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\lambda\frac{\partial t}{\partial \varphi})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\lambda\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta})+\phi$$

综上说明：

(1)导热问题仍然服从能量守恒定律；

(2)等号左边是单位时间内微元体热力学能的增量（非稳态项）；

(3)等号右边前三项之和是通过界面的导热使微分元体在单位时间内增加的能量 (扩散项);

(4)等号右边最后项是源项；

(5)若某坐标方向上温度不变，该方向的净导热量为零，则相应的扩散项即从导热微分方程中消失。

通过导热微分方程可知，求解导热问题，实际上就是对导热微分方程式的求解。欲知某一导热问题的温度分布，必须给出表征该问题的附加条件。

二、 定解条件

1 、定义：是指使导热微分方程获得适合某一特定导热问题的求解的附加条件。

2 、分类：1 ）初始条件：初始时间温度分布的初始条件；

2 ）边界条件：导热物体边界上温度或换热情况的边界条件。

说明： ①非稳态导热定解条件有两个；初始条件、边界条件。

②稳态导热定解条件只有边界条件，无初始条件。

3 、导热问题的常见边界条件可归纳为以下三类：

1 ）规定了边界上的温度值，称第一类边界条件,即 $t_w = C$。对于非稳态导热这类边界条件要求给出以下关系，$\tau>0$ 时, $t_w = f_1(\tau)$ ；

2 ）规定了边界上的热流密度值，称为第二类边界条件；

对于非稳态导热这类边界条件要求给出以下关系式：

当$\tau>0$ 时，$\lambda(\frac{\partial t}{\partial n})_w = f_2(\tau)$

式中 n——为表面 A 的法线方向

3 ）规定了边界上物体与周围流体间的表面传热系数 h 以及周围流体的温度 t_f，称为第三类边界条件。

以物体被冷却为例：$\lambda(\frac{\partial t}{\partial n})_w = h(t_w - t_f)$

对于非稳态导热，式中 h、t_f 均是τ的函数。

三、有关说明

1 、热扩散率的物理意义

由热扩散率的定义：$a = \lambda / \rho c$,可知：

1） λ是物体的导热系数，λ越大，在相同温度梯度下，可以传导更多的热量。

2) ρc 是单位体积的物体温度升高 1 ℃ 所需的热量。 ρc 越小，温度升高 1 ℃所吸收的热量越少，可以剩下更多的热量向物体内部传递，使物体内温度更快的随界面温度升高而升高。由此可见 a 物理意义：

① α越大，表示物体受热时，其内部各点温度扯平的能力越大。

② α越大，表示物体中温度变化传播的越快。所以，α也是材料传播温度变化能力大小的指标，亦称导温系数。

2 、导热微分方程的适用范围

1 ）适用于 q 不很高，而作用时间长。同时傅立叶定律也适用该条件。

2 ）若时间极短，而且热流密度极大时，则不适用。

3 ）若属极低温度（ -273 ℃ ）时的导热不适用。

§2-3 典型一维稳态导热问题的分析解

一 、通过平壁的导热

1 、单层平壁

已知：单层平壁两侧恒温且为 t_1、t_2，壁厚δ，如图 2-6 所示，建立坐标系，

边界条件为： x=0 时 $t=t_1$ ；$x=\delta$ 时 $t=t_2$，温度只在 x 方向变化，属一维温度场。

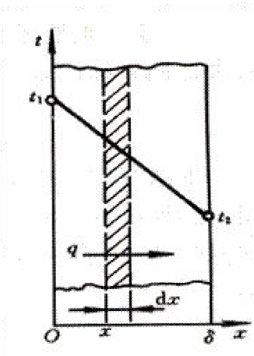

图 2-6 单层平壁

试求：温度分布并确定 $q=f(t_1, t_2, \lambda, \delta)$。

1 ）温度分布

当 $\lambda=\text{const}$ 时，无内热源的一维稳态导热微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2t}{dx^2}=0 \\ x=0, t=t_1 \\ x=\delta, t=t_2 \end{cases}$$

对此方程积分求其通解（连续积分两次）：

$$t=c_1x+c_2$$

其中 c_1、c_2 为常数，并且由边界条件确定：

当 x=0 时 $t=t_1$ ∴ $c_2=t_1$

当 $x=\delta$ 时 $t=t_2$ ∴ $c_1=(t_2-t_1)/\delta$

∴该条件下其温度分布为：$t=\dfrac{t_2-t_1}{\delta}x+t_1$

又∵ δ、t_1、t_2 均属定值

∴温度成线性关系，即温度分布曲线的斜率是常数（温度梯度） $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{t_2-t_1}{\delta}$

2 ）热流密度 q

把温度分布 dt / dx 代入傅立叶定律 $q=-\lambda(dt/dx)$ 得；

$$q=\frac{\lambda(t_1-t_2)}{\delta}=\frac{\lambda}{\delta}\Delta t$$

若表面积为 A, 在此条件下 , 通过平壁的导热热流量则为 :

$$\Phi=A\frac{\lambda}{\delta}\Delta t$$

此两式是通过平壁导热的计算公式，它们揭示了 q、Φ 与 λ 、δ 和 Δt 之间的关系。

2 、热阻的含义

热量传递是自然界的一种转换过程, 与自然界的其他转换过程类同, 如: 电量的转换 , 动量、质量等的转换。其共同规律可表示为: 过程中的转换量=过程中的动力/过程中的阻力。

由前可知 1）在平板导热中 导热热流量：$\Phi = A\frac{\lambda}{\delta}\Delta t$， 即 $\Phi = \frac{\Delta t}{(\delta / A\lambda)}$

式中Φ --------热流量为导热过程的转移量；

Δ t -------温度为导热过程的动力；

δ/(Aλ) ----为导热过程的阻力。

2）在一个传热过程中，根据传热方程式 $\Phi = kA\Delta t$ ，得 $\Phi = \frac{\Delta t}{(1/kA)}$

式中Φ ------传热过程中的热流量为传热过程的转移量；

Δ t --------温压为传热过程的动力；

$\frac{1}{kA}$ --------传热过程的阻力

由此引出热阻的概念：

1 ）热阻定义：热转移过程的阻力称为热阻。

2 ）热阻分类：不同的热量转移有不同的热阻，其分类较多，如：导热阻、辐射热阻、对流热阻等。对平板导热而言又分：

面积热阻 RA ：单位面积的导热热阻称面积热阻。

热阻 R ：整个平板导热热阻称热阻。

3 ）热阻的特点：

串联热阻叠加原则：在一个串联的热量传递过程中，若通过各串联环节的热流量相同，则串联过程的总热阻等于各串联环节的分热阻之和。 因此，稳态传热过程热阻的组成是由各个构成环节的热阻组成，且符合热阻叠加原则。

3 、复合壁的导热情况

复合壁（多层壁）：就是由几层不同材料叠加在一起组成的复合壁。 以下讨论三层复合壁的导热问题，如图 2-7 所示。

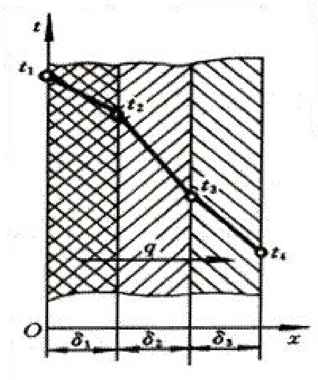

图 2-7 多层平壁

假设条件：层与层间接触良好，没有引起附加热阻（亦称为接触热阻）也就是说通过层间分界面时不会发生温度降。

已知各层材料厚度为δ_1、δ_2、δ_3的导热系数为 λ_1、λ_3，多层壁内外表面温度为 t_1、t_4，其中间温度 t_2 、t_3 未知，λ ＝ const 。

试求：通过多层壁的热流密度 q 。

解：根据平壁导热公式可知，各层热阻为

$$\delta_1/\lambda_1=(t_1-t_2)/q \ ; \quad \delta_2/\lambda_2=(t_2-t_3)/q \ ; \quad \delta_3/\lambda_3=(t_3-t_4)/q$$

根据串联热阻叠加原理得多层壁的总热阻为（适用条件：无内热源，一维稳态导热）

$$(t_1-t_4)/q=\delta_1/\lambda_1+\delta_2/\lambda_2+\delta_3/\lambda_3$$

则多层壁热流密度计算公式 $q=(t_1-t_4)/[\delta_1/\lambda_1+\delta_2/\lambda_2+\delta_3/\lambda_3]$

将 q 代入各层热阻公式，得层间分界面上未知温度 t_2；t_3

$$t_2=t_1-q(\delta_1/\lambda_1) \ ; \quad t_3=t_2-q(\delta_2/\lambda_2)$$

说明：当导热系数 λ 对温度 t 有依变关系时，即 λ 是 t 的线性函数时 $\lambda=\lambda_0(1+bt)$ 时，只需求得该区域平均温度下的 λ 值，代入以上公式（ $\lambda=const$ ）即可求出正确结果。